RED BUILDING TEAM

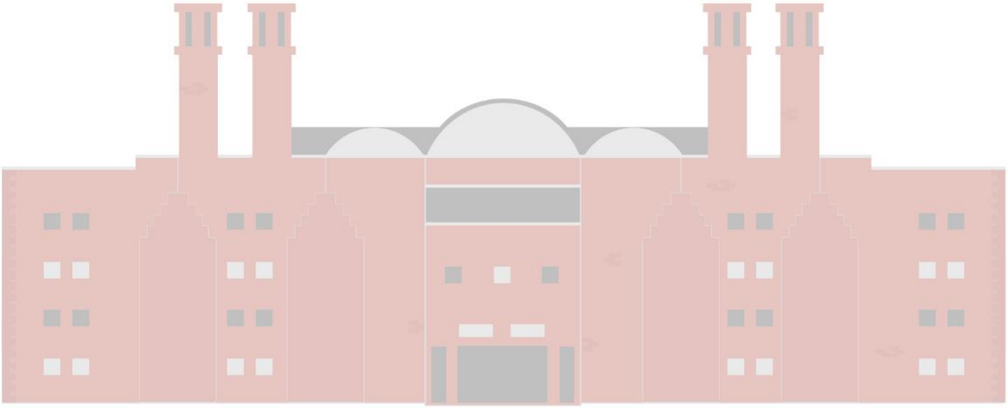
قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

السنة الثانية / الفصل الأول

التحليل العددي

المحاضرة الثامنة

5 صفحات



الدكتور: صالح ملحم

التاريخ: ٢٠١٤/١٠/٣٠

السرعة، الدقّة والتميُّز

/RedBuildingTeam

لا تنسونا من دعائكم فنحنُ نحتاجه من قلوبكم ♥

.. عملي ..

طريقة نيوتن (فروق القسمة)

ليكن لدينا مجموعة من نقاط المستوي المعلومة $(-1,1),(1,1),(0,0)$ فإن جدول فروق القسمة :

x_n	y_n	$F[,]$	$F[\ ,\ ,]$
-1	1		
0	0	$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{0-1}{0-(-1)}=-1$	
1	1	$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-0}{1-0}=1$	$\frac{1-(-1)}{1-(-1)}=1$

مثال أخر :

x_n	y_n	$F[,]$	$F[\ ,\ ,]$	$F[,,,]$
0	3			
1	2	$\frac{2-3}{1-0}=-1$		
3	-1	$\frac{-1-2}{3-1}=-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{6}$	
4	1	$\frac{1-(-1)}{4-3}=2$	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{3}$

وكما أخذنا سابقا أن شرط الاستيفاء لكثير الحدود:

$$P_2(x)=d_0+d_1(x-x_0)+d_2(x-x_0)(x-x_1)$$

هو من الشكل $y_0=P_2(x_0)$ نعوض في كثير الحدود

$$y_0=d_0+d_1(x_0-x_0)+d_2(x_0-x_0)(x_0-x_1)\Rightarrow y_0=d_0$$

$$y_1=P_n(x_1)$$

$$y_1=y_0+d_1(x_1-x_0)+d_2(x_1-x_0)(x_1-x_1)\Rightarrow y_1-y_0=d_1(x_1-x_0)$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{y_- y_0}{x_1 - x_0}$$

أي أن $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ تمثل الأعدلد في القطر الرئيسي للجدول

أوجد كثير حدود الاستيفاء نيوتن ديفوري (أوجد فروق القسمة للنقاط التالية):

$$(-1\,,-1), (0,0), (1,1), (2,8)$$

$$P_3(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$+d_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)$$

نقوم بتعيين الأمثال ... ... $d_1, d_2, d_3,$ وذلك عن طريق جدول فروق القسمة

x_n	y_n	$F[\,,]$	$F[\,,\ ,]$	$F[\,,,,]$
-1	-1			
0	0	1		
1	1	1	0	
2	8	7	3	1

$$P_3(x) = -1 + 1(x - (-1)) + 0(x - (-1))(x - 0) + 1(x - (-1))(x - 0)(x - 1)$$
$$= x^3$$

باستخدام طريقة نيوتن ديفوري (فروق ا لقسمة) أوجد كثير حدود الاستيفاء للنقاط التالية :

$$(1,3), (2,5), (3,6), (4,7)$$

x_n	y_n	$F[\,,]$	$F[\,,\ ,]$	$F[\,,,,]$
1	3			
2	5	2		
3	6	1	$-\frac{1}{2}$	
4	7	1	0	$\frac{1}{6}$

$$P_3(x) = 3 + 2(x - 1) + -\frac{1}{2}(x - 1)(x - 2) + \frac{1}{6}(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

المربعات الصغرى

الاستنتاج نظريا (للفهم دون الحفظ) : ليكن لدينا $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$

$$E(a_0, a_1) = \left(y_0 - P(x_0)\right)^2 + \left(y_1 - P(x_1)\right)^2 + \cdots + \left(y_n - P(x_n)\right)^2$$

$$= \left(y_0 - (a_0 + a_1 x_0)\right)^2 + \left(y_1 - (a_1 + a_1 x_1)\right)^2 + \cdots + \left(y_n - (a_0 + a_1 x_n)\right)^2$$

$$E(a_0, a_1) = (y_0 - a_0 - a_1 x_0)^2 + (y_1 - a_0 - a_1 x_1)^2 + \cdots + (y_n - a_0 - a_1 x_n)^2$$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a_0} = -2(y_0 - a_0 - a_1 x_0) - 2(y_1 - a_0 - a_1 x_1) + \cdots - 2(y_n - a_0 - a_1 x_n)$$

$$0 = y_0 - a_0 - a_1 x_0 + y_1 - a_0 - a_1 x_1 \dots + y_n - a_0 - a_1 x_n$$

$$0 = \sum_{i=0}^{n} y_i - (n+1)a_0 - a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} y_i = (n+1)a_0 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i \dots .(1$$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a_0} = -2x_0(y_0 - a_0 - a_1 x_0) - 2x_1(y_1 - a_0 - a_1 x_1) \dots$$
$$- 2x_n(y_n - a_0 - a_1 x_n)$$

$$0 = x_0 y_0 - a_0 x_0 - a_1 x_0^2 + x_1 y_1 - a_0 x_1 - a_1 x_1^2 + \cdots + x_n y_n - a_0 x_n - a_1 x_n^2$$

$$0 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i - a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i - a_i \sum_{i=o}^{n} x_i^2$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i y_i = a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_i \sum_{i=o}^{n} x_i^2 \dots (2$$

لحفظ المعادلات :

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

١- $\sum_{i=0}^{n} y_i = n a_0 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^2$

٢- $\sum_{i=0}^{n} x_i y_i = a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^3$

٣- $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i = a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^4$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

مثال : باستخدام طريقة المربعات الصغرى أوجد كثير حدود خطي ملائم للقيم التالية :

x_i	1	2	3	4
y_i	1.7	1.8	2.3	3.2

$p(x) = a_0 + a_1 x$

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	1.7	1.7	1
2	1.8	3.6	4
3	2.3	6.9	9
4	3.2	12.8	16
10	9	25	30

$$\sum_{i=0}^{n} y_i = n a_0 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i \quad \ldots(1$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i y_i = a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \quad \ldots.(2$$

بالتعويض في (١) نجد : $9 = 4a_0 + 10a_1$

بالتعويض في (٢) نجد :

$$25 = 10a_0 + 30a_1$$

بحل جمل المعادلات نجد أن : $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $p(x) = 1 + \frac{1}{2}x$

مثال : باستخدام طريقة المربعات الصغرى أوجد التابع الأسي الملائم للنقاط التالية :

x_i	1	2	3
y_i	2	3	4

$f(x) = ae^{bx}$

$$y = ae^{bx}$$
$$\ln y = \ln(a \,.\, e^{bx})$$
$$\ln y = \ln a + \ln x$$
$$Y = A_0 + A_1 x$$

x_i	1	2	3
$y_i = \ln y_i$	ln 2	ln 3	ln 4

$$\sum_{i=0}^{n} y_i = nA_0 + A_1 \sum_{i=0}^{n} x_i \quad \ldots (1$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i y_i = A_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + A_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \ldots (2$$

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	0.693	0.693	1
2	1.098	2 * 1,098	4
3	2.3	3 * 1.389	9
6	3.177	7.047	14

$$3.177 = 3A_0 + 6A_1$$
$$7.047 = 6A_0 + 14A_1$$

بالحل المشترك :

$$A_0 = 0.366$$
$$A_1 = 0.3465 = b$$

$$a = e^{A_0} = 1.44$$
$$f(x) = 1.44\, e^{0.3465\, x}$$

الصبر نبات طعمه مر لكنه ينبت فاكهة حلوة الطعم.

rbd
لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي